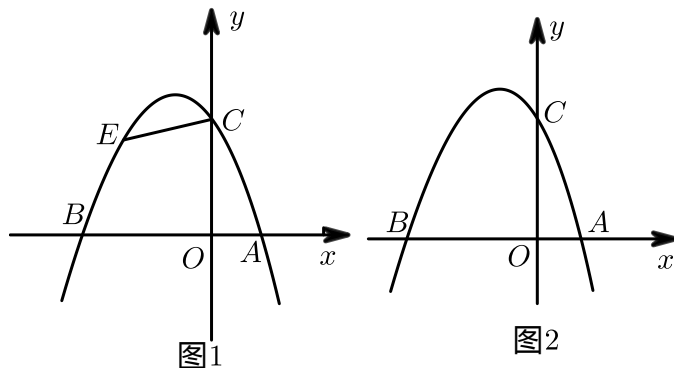


第1讲二次函数与三角形存在性（练习）

一、 等腰三角形

1. 如图1，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 $B(-3, 0)$ 与 y 轴交于点 C 。



- (1) 求抛物线的表达式。
- (2) 如图1，若点 E 为第二象限抛物线上一动点，连接 BE ， CE ，求四边形 $BOCE$ 面积的最大值，并求此时 E 点的坐标。
- (3) 如图2，在 x 轴上是否存在一点 D 使得 $\triangle ACD$ 为等腰三角形？若存在，请求出所有符合条件的点 D 的坐标，若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = -x^2 - 2x + 3$ 。

(2) $\frac{63}{8}$ ， $(a, -a^2 - 2a + 3) (-3 < a < 0)$ 。

(3) 存在，

$D_1(-1, 0)$ 或 $D_2(0 - \sqrt{10} + 1, 0)$ 或 $D_3(\sqrt{10} + 1, 0)$ 或 $D_4(-4, 0)$ 。

【解析】 (1) 由题知：

$$\begin{cases} a + b + 3 = 0 \\ 9a - 3b + 3 = 0 \end{cases}$$

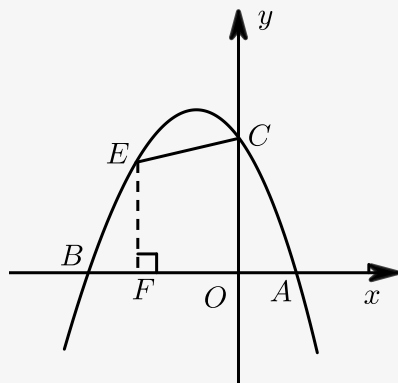
解得 $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 所求抛物线表达式为：

$$y = -x^2 - 2x + 3。$$

故答案为： $y = -x^2 - 2x + 3$ 。

(2) 过点 E 作 $EF \perp x$ 轴于点 F ，



设 $E(a, -a^2 - 2a + 3) (-3 < a < 0)$,

$$\therefore EF = -a^2 - 2a + 3,$$

$$BF = a + 3, OF = -a,$$

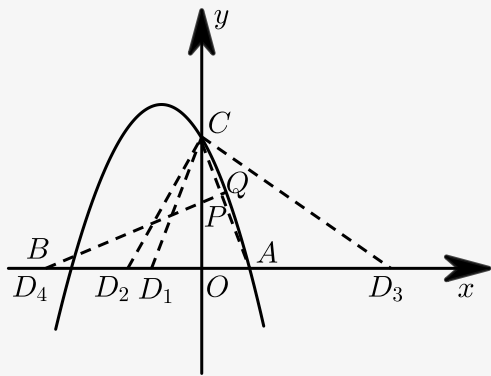
$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{四边形}BOCE} &= \frac{1}{2}BF \cdot EF + \frac{1}{2}(OC + EF) \cdot OF \\ &= \frac{1}{2}(a + 3)(-a^2 - 2a + 3) + \frac{1}{2}(-a^2 - 2a + 3 + 3) \cdot (-a) \\ &= -\frac{3}{2}a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{9}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{63}{8}, \\ \therefore \text{当 } a &= -\frac{3}{2} \text{ 时,} \end{aligned}$$

$S_{\text{四边形}BOCE}$ 最大,

且最大值为 $\frac{63}{8}$.

故答案为: $(a, -a^2 - 2a + 3) (-3 < a < 0)$, $\frac{63}{8}$.

(3) 连接 AC ,



①当点 C 为顶点, $CA = CB$ 时,

此时 CO 为底边的垂直平分线,

满足条件的点 D_1 与点 A 关于 y 轴对称,

$\therefore$ 点 D_1 坐标为 $(-1, 0)$.

②当点 A 为顶点, $AB = AC$ 时,

在 $\text{Rt}\triangle ACO$ 中,

$$\because OA = 1, OC = 3,$$

由勾股定理得 $AC = \sqrt{10}$,

以点 A 为圆心 ,

AC 的长为半径作弧 ,

交 x 轴于两点 D_2 , D_3 即为满足条件的点 ,

此时它们的坐标为 $D_2(-\sqrt{10}+1, 0)$,

$D_3(\sqrt{10}+1, 0)$,

③当 AC 为底边时 ,

线段 AC 的垂直平分线与 x 轴的焦点 D_4 ,

即为满足条件的点 ,

设垂直 AC 的垂直平分线交 y 轴于点 P ,

过 AC 中点 Q ,

$$\because \angle AOC = \angle BOC = \angle PQC = 90^\circ$$

$$\angle BPO = \angle CPQ ,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle OD_4P ,$$

$$\therefore \triangle CPQ \sim \triangle CAO \sim \triangle D_4PO ,$$

$$\frac{OD_4}{OA} = \frac{CQ}{CO} = \frac{CP}{AC} ,$$

$$PQ = \frac{\sqrt{10}}{6} , CP = \frac{5}{3} ,$$

$$\frac{OD_4}{CQ} = \frac{OP}{PQ} \cdot \frac{OD_4}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{3 - \frac{5}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{6}} ,$$

$$OD_4 = 4 ,$$

点 D_4 坐标为 $(-4, 0)$,

综上所述存在符合条件的点 D ,

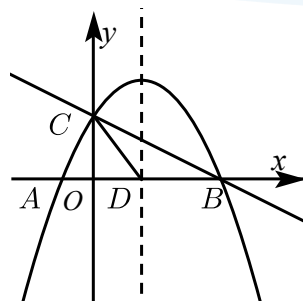
其坐标为 $D_1(-1, 0)$ 或 $D_2(0 - \sqrt{10} + 1, 0)$ 或 $D_3(\sqrt{10} + 1, 0)$ 或 $D_4(-4, 0)$.

故答案为 : 存在 ,

$D_1(-1, 0)$ 或 $D_2(0 - \sqrt{10} + 1, 0)$ 或 $D_3(\sqrt{10} + 1, 0)$ 或 $D_4(-4, 0)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

2. 如图 , 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 , 与 y 轴交于点 C , 抛物线的对称轴交 x 轴于点 D , 已知 $A(-1, 0)$, $C(0, 2)$.



- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 在抛物线的对称轴上是否存在点 P , 使 $\triangle PCD$ 是以 CD 为腰的等腰三角形? 如果存在, 直接写出 P 点的坐标; 如果不存在, 请说明理由.
- (3) 点 E 是线段 BC 上的一个动点, 过点 E 作 x 轴的垂线与抛物线相交于点 F , 当点 E 运动到什么位置时, $\triangle CBF$ 的面积最大? 求出 $\triangle CBF$ 的最大面积及此时 E 点的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

(2) P 点的坐标为 $(\frac{3}{2}, 4)$ 或 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 或 $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$.

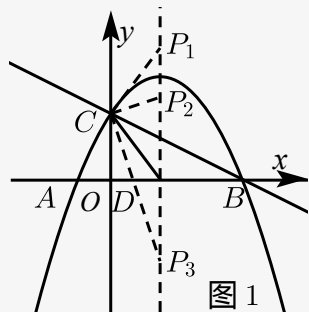
(3) 当 E 运动到 BC 的中点时, $\triangle FBC$ 面积最大, $\triangle FBC$ 最大面积 = 4, 此时 $E(2, 1)$.

【解析】 (1) 把 $A(-1, 0)$, $C(0, 2)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得 $\begin{cases} -\frac{1}{2} - b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$,

解得 $b = \frac{3}{2}$, $c = 2$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

(2) 方法一: 存在. 如图1中,



$\therefore C(0, 2)$, $D(\frac{3}{2}, 0)$,

$\therefore OC = 2$, $OD = \frac{3}{2}$, $CD = \sqrt{OD^2 + OC^2} = \frac{5}{2}$,

① 当 $CP = CD$ 时, 可得 $P_1(\frac{3}{2}, 4)$,

② 当 $DC = DP$ 时, 可得 $P_2(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $P_3(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$,

综上所述, 满足条件的 P 点的坐标为 $(\frac{3}{2}, 4)$ 或 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 或 $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$.

方法二: $\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{8}$,

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore D(\frac{3}{2}, 0)$, 且 $C(0, 2)$,

$$\therefore CD = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2},$$

$\therefore$ 点 P 在对称轴上,

$\therefore$ 可设 $P\left(\frac{3}{2}, t\right)$,

$$\therefore PD = |t|, PC = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (t-2)^2},$$

当 $PD = CD$ 时, 则有 $|t| = \frac{5}{2}$, 解得 $t = \pm \frac{5}{2}$,

此时 P 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$;

当 $PD = CD$ 时, 则有 $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (t-2)^2} = \frac{5}{2}$, 解得 $t = 0$ (与 D 重合, 舍去) 或 $t = 4$,

此时 P 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$;

综上可知存在满足条件的点 P , 其坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

(3) 方法一: 如图2中,

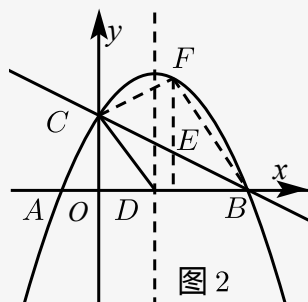


图 2

对于抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$,

当 $y = 0$ 时, $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$,

解得 $x_1 = 4$, $x_2 = -1$,

$\therefore B(4, 0)$, $A(-1, 0)$,

由 $B(4, 0)$, $C(0, 2)$ 得直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

设 $E\left(m, -\frac{1}{2}m + 2\right)$ 则 $F\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2\right)$,

$$EF = \left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2\right) - \left(-\frac{1}{2}m + 2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}m^2 + 2m$$

$$= -\frac{1}{2}(m-2)^2 + 2,$$

$\therefore -\frac{1}{2} < 0$, $\therefore$ 当 $m = 2$ 时, EF 有最大值 2,

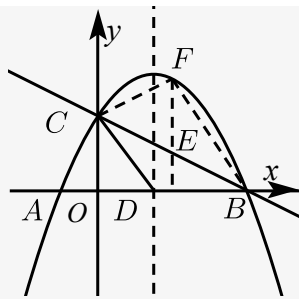
此时 E 是 BC 中点,

$\therefore$ 当 E 运动到 BC 的中点时, $\triangle FBC$ 面积最大,

$\therefore \triangle FBC$ 最大面积 $= \frac{1}{2} \times 4 \times EF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$, 此时 $E(2, 1)$.

方法二: 当 $y = 0$ 时, 即 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 4$,

$\therefore A(-1, 0)$, $B(4, 0)$,



设直线 BC 解析式为 $y = kx + s$,

由题意可得 $\begin{cases} s = 2 \\ 4k + s = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} s = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BC 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

$\because$ 点 E 是线段 BC 上的一个动点,

$\therefore$ 可设 $E\left(m, -\frac{1}{2}m + 2\right)$, 则 $F\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2\right)$,

$\therefore EF = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2 - \left(-\frac{1}{2}m + 2\right)$

$= -\frac{1}{2}m^2 + 2m$

$= -\frac{1}{2}(m - 2)^2 + 2$,

$\therefore S_{\triangle CBF} = \frac{1}{2} \times 4 \cdot EF = 2 \left[-\frac{1}{2}(m - 2)^2 + 2 \right] = -(m - 2)^2 + 4$,

$\because -1 < 0$,

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, $S_{\triangle CBF}$ 有最大值, 最大值为4,

此时 $-\frac{1}{2}x + 2 = 1$,

$\therefore E(2, 1)$, 即 E 为 BC 的中点,

$\therefore$ 当 E 运动到 BC 的中点时, $\triangle CBF$ 的面积最大, 最大面积为4, 此时 E 点坐标为 $(2, 1)$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

3. 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 交 x 轴于 $A(-3, 0)$, $B(4, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C , 连接 AC , BC , M 为线段 OB 上的一个动点, 过点 M 作 $PM \perp x$ 轴, 交抛物线于点 P , 交 BC 于点 Q .

(1) 求抛物线的解析式.

(2) 过点 P 作 $PN \perp BC$, 垂足为点 N . 设 M 点的坐标为 $M(m, 0)$, 请用含 m 的代数式表示线段 PN 的长, 并求出当 m 为何值时 PN 有最大值, 最大值是多少?

(3) 试探究点 M 在运动过程中, 是否存在这样的点 Q , 使得以 A , C , Q 为顶点的三角形是等腰三角形. 若存在, 请求出此时点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$.

(2) $m = 2, \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(3) 存在, $(1, 3)$ 或 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)$.

【解析】(1) 将点A、B的坐标代入抛物线表达式得

$$\begin{cases} 9a - 3b + 4 = 0 \\ 16a + 4b + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases},$$

故抛物线的表达式为: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$.

(2) 由抛物线的表达式知, 点C(0, 4),

由点B、C的坐标得, 直线BC的表达式为: $y = -x + 4$;

设点M(m, 0),

则点P $\left(m, -\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m + 4\right)$,

点Q(m, -m + 4),

$$\therefore PQ = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m + 4 + m - 4 = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m,$$

$\because OB = OC$,

故 $\angle ABC = \angle OCB = 45^\circ$,

$\therefore \angle PQN = \angle BQM = 45^\circ$,

$$\therefore PN = PQ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6}(m-2)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{6} < 0,$$

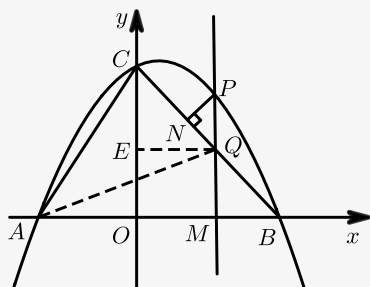
故当m = 2时, PN有最大值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(3) 存在, 理由:

点A、C的坐标分别为(-3, 0)、(0, 4),

则AC = 5,

①当AC = CQ时, 过点Q作QE⊥y轴于点E, 连接AQ,



$$\text{则 } CQ^2 = CE^2 + EQ^2,$$

$$\text{即 } m^2 + [4 - (-m + 4)]^2 = 25,$$

$$\text{解得: } m = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (舍去负值)},$$

故点 $Q\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)$,

②当 $AC = AQ$ 时,

则 $AQ = AC = 5$,

在 $Rt\triangle AMQ$ 中,

由勾股定理得: $[m - (-3)]^2 + (-m + 4)^2 = 25$,

解得: $m = 1$ 或 0 (舍去),

故点 $Q(1, 3)$;

③当 $CQ = AQ$ 时,

则 $2m^2 = [m - (-3)]^2 + (-m + 4)^2$,

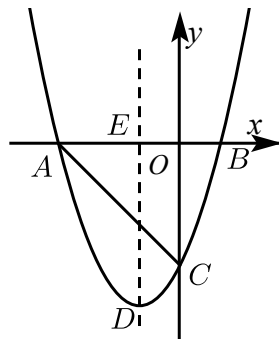
解得: $m = \frac{25}{2}$ (舍去);

综上, 点 Q 的坐标为 $(1, 3)$ 或 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

二、 直角三角形

4. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 6$ ($a \neq 0$)与 x 轴交于点 $A(-6, 0)$ 、 $B(2, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 连接 AC .



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 若点 P 为第三象限内抛物线上的一点, 设 $\triangle PAC$ 的面积为 S , 求 S 的最大值并求出此时点 P 的坐标.

(3) 设抛物线的顶点为 D , $DE \perp x$ 轴于点 E , 在 y 轴上是否存在点 Q , 使得 $\triangle ADQ$ 是直角三角形? 若存在, 请直接写出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$.

(2) S 最大值 $\frac{27}{2}$, $P\left(-3, -\frac{15}{2}\right)$.

(3) 存在, $Q_1(0, 3)$, $Q_2(0, -7)$, $Q_3(0, -2)$, $Q_4(0, -6)$.

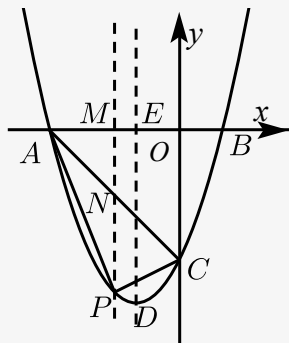
【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 6 (a \neq 0)$ 经过点 $A(-6, 0)$ 、 $B(2, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 36a - 6b - 6 = 0 \\ 4a + 2b - 6 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6.$$

(2) 如图, 过点 P 作 x 轴的垂线, 交 x 轴于点 M , 交 AC 于点 N .



$$\text{在 } y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \text{ 中, 令 } x = 0, \text{ 则 } y = -6,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (0, -6),$$

$$\text{设直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = kx + m,$$

$$\text{由题意得: } \begin{cases} -6k + m = 0 \\ m = -6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ m = -6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = -x - 6.$$

$$\text{设 } P \text{ 点坐标为 } \left(x, \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6\right),$$

$$\text{则点 } N \text{ 的坐标为 } (x, -x - 6),$$

$$\therefore PN = PM - NM = -\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6\right) + (-x - 6) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x.$$

$$\therefore S_{\triangle PAC} = S_{\triangle PAN} + S_{\triangle PCN},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}PN \cdot AM + \frac{1}{2}PN \cdot OM = \frac{1}{2}PN \cdot OA = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) \times 6 = -\frac{3}{2}(x+3)^2 + \frac{27}{2}$$

,

$$\therefore \text{当 } x = -3 \text{ 时, } S \text{ 有最大值 } \frac{27}{2},$$

$$\text{此时 } \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 = -\frac{15}{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为: } \left(-3, -\frac{15}{2}\right).$$

(3) $\triangle ADQ$ 为直角三角形, 分 3 种情况讨论,

当 $\angle QAD = 90^\circ$ 时, 即点 A 为直角顶点,

A 点坐标为 $(-6, 0)$, D 点坐标为 $(-2, -8)$,

$$\therefore k_{AD} = \frac{-8-0}{-2+6} = -2,$$

$$\therefore k_{AQ} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{设直线 } AQ \text{ 解析式为: } y = \frac{1}{2}x + b,$$

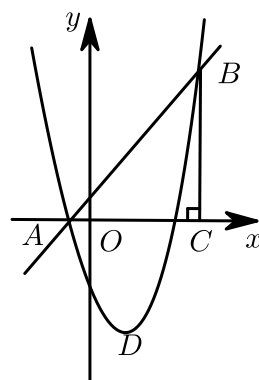
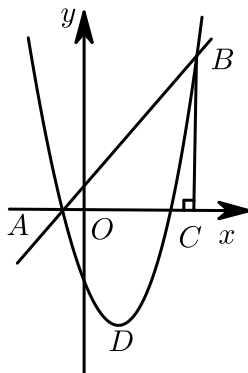
$\therefore Q_3$ 坐标为 $(0, -2)$, Q_4 坐标为 $(0, -6)$.

综上所述：当 y 轴上 Q 点使 $\triangle ADQ$ 为直角三角形时，

Q 点坐标为： $Q_1(0, 3)$, $Q_2(0, -7)$, $Q_3(0, -2)$, $Q_4(0, -6)$.

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

5. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = x + 1$ 与抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 交于 A, B 两点，点 A 在 x 轴上，过点 B 作 x 轴的垂线 BC ，垂足为点 C ， $OC = 4$ ，抛物线的顶点为 D .



备用图

- (1) 求抛物线解析式.
- (2) 点 E 是线段 AB 上一动点(点 A, B 除外)，过点 E 作 x 轴的垂线交抛物线于点 F ，当线段 EF 的长度最大时，求点 E 的坐标.
- (3) 在(2)的条件下，在直线 EF 上是否存在点 P ，使 $\triangle ABP$ 是直角三角形？若存在，求出可能存在的 P 的坐标；若不存在，说明理由.

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) $E\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

(3) 存在, $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5+5\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5-5\sqrt{2}}{2}\right)$.

【解析】 (1) 直线 $y = x + 1$ ，当 $y = 0$ 时， $x = -1$ ，

$\therefore A(-1, 0)$ ；当 $x = 4$ 时， $y = 5$ ，

$\therefore B(4, 5)$. 由 $A(-1, 0)$, $B(4, 5)$.

得 $\begin{cases} 1 - b + c = 0, \\ 16 + 4b + c = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = -2, \\ c = -3, \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) 设点 $E(m, m + 1)$ ，则 $F(m, m^2 - 2m - 3)$ ，

$\therefore EF = (m + 1) - (m^2 - 2m - 3) = -m^2 + 3m + 4$ ，

$= -\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ ，

$$\therefore -1 < m < 4,$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{3}{2} \text{ 时, } EF \text{ 的长度最大, 则点 } E\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

$$(3) \text{ 直线 } EF: x = \frac{3}{2}.$$

$$\text{设 } P\left(\frac{3}{2}, n\right), \text{ 则 } AP^2 = \left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + n^2, BP^2 = \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 + (5 - n)^2, AB^2 = 50,$$

$$\text{① 当 } A \text{ 为直角顶点时, 由勾股定理得 } AP^2 + AB^2 = BP^2, \text{ 解得 } n = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right);$$

$$\text{② 当 } B \text{ 为直角顶点时, 由勾股定理得 } BP^2 + AB^2 = AP^2,$$

$$\text{解得 } n = \frac{15}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right);$$

$$\text{③ 当 } P \text{ 为直角顶点时, 由勾股定理得 } AP^2 + BP^2 = AB^2,$$

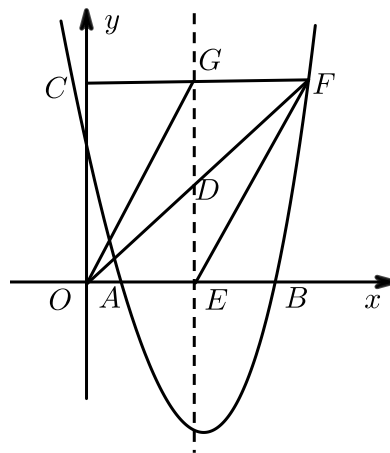
$$\text{解得 } n_1 = \frac{5 + 5\sqrt{2}}{2}, n_2 = \frac{5 - 5\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{5 + 5\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{3}{2}, \frac{5 - 5\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{综上, } P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{3}{2}, \frac{5 + 5\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{3}{2}, \frac{5 - 5\sqrt{2}}{2}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

6. 如图, 一抛物线与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C , 且 $A(1, 0)$, $OB = OC = 5OA$.



(1) 求此抛物线的解析式.

(2) 若点 $F(6, m)$ 在此抛物线上, 抛物线的对称轴交 x 轴于点 E , 交 CF 于点 G , 连接 OG 、 EF , 试判断四边形 $OEGF$ 的形状, 并说明理由.

(3) 在 (2) 的条件下, 连接 OF 交对称轴于点 D , 在抛物线对称轴上是否存在点 P , 使 $\triangle OFP$ 是直角三角形? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = x^2 - 6x + 5$.

(2) 平行四边形；证明见解析.

(3) 存在； $P\left(3, -\frac{18}{5}\right)$ 或 $\left(3, \frac{43}{5}\right)$ 或 $\left(3, \frac{\sqrt{61}+5}{2}\right)$ 或 $\left(3, \frac{-\sqrt{61}-5}{2}\right)$.

【解析】(1) 设抛物线为 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\because OA = 1, OB = OC = 5OA,$$

$$\therefore B \text{ 为 } (5, 0), C \text{ 为 } (0, 5),$$

$$\because \text{抛物线过 } A(1, 0), B(5, 0), C(0, 5),$$

$$\therefore \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a + b + 5 = 0 \\ 25a + 5b + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 - 6x + 5.$$

(2) $\because F(6, m)$ 在抛物线 $y = x^2 - 6x + 5$ 上,

$$\therefore 36 - 36 + 5 = m,$$

$$\therefore m = 5, F \text{ 为 } (6, 5),$$

$$\because C \text{ 为 } (0, 5),$$

$$\therefore CF \parallel OE,$$

$$\text{又} \because \text{抛物线的对称轴为 } x = 3,$$

$$\therefore G(3, 5), E(3, 0),$$

$$\therefore GF = OE = 3,$$

$$\therefore \text{四边形 } OEFC \text{ 为平行四边形}.$$

(3) $\because F(6, 5),$

$$\therefore D(3, 2.5),$$

①当点 O 为直角顶点时，如图1所示，

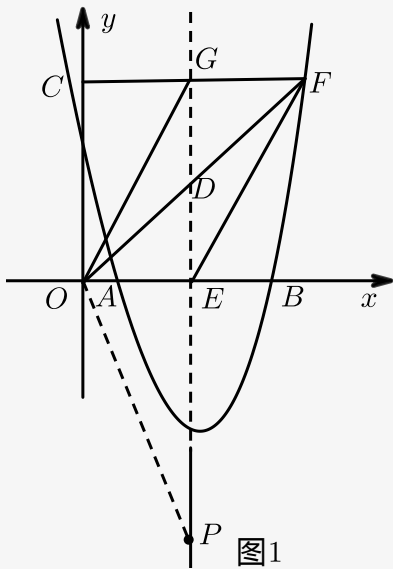


图1

则 $\angle POF = 90^\circ = \angle OED$,

$\therefore \angle POE = \angle ODE$,

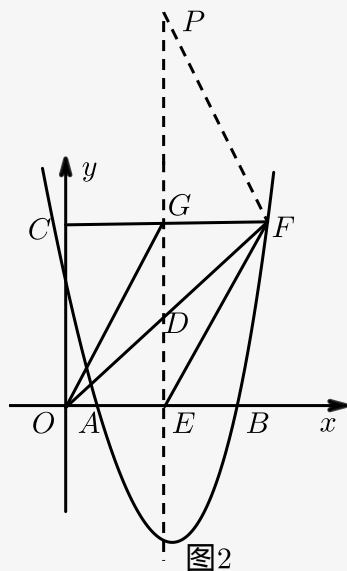
$\triangle OED \sim \triangle PEO$,

$$\therefore \frac{OE}{PE} = \frac{OE}{OE}, \text{ 即 } \frac{3}{PE} = \frac{5}{2},$$

$$\text{解得: } PE = \frac{18}{5},$$

$$\therefore P = \left(3, -\frac{18}{5}\right).$$

②当点 F 为直角顶点时, 如图2所示, 同理可得 $FG^2 = PG \cdot GD$,



$$\therefore PG = \frac{18}{5},$$

$$\therefore PE = \frac{43}{5},$$

$$\therefore P = \left(3, \frac{43}{5}\right).$$

③当点 P 为直角顶点时, 由勾股定理得 $OF = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$,

又 $\because PD$ 是 $\text{Rt}\triangle OPF$ 斜边 OF 上的中线,

$$\therefore PD = \frac{\sqrt{61}}{2},$$

若点 P 在 OD 上方, 如图3所示, 则 $PE = \frac{\sqrt{61} + 5}{2}$,

$$\therefore P \left(3, \frac{\sqrt{61} + 5}{2}\right),$$

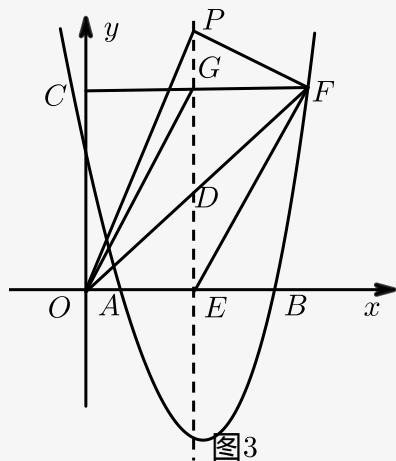


图3

若点 P 在 OD 下方时，如图4所示，则 $PE = \frac{\sqrt{61}-5}{2}$ ，

$$\therefore P\left(3, \frac{-\sqrt{61}-5}{2}\right).$$

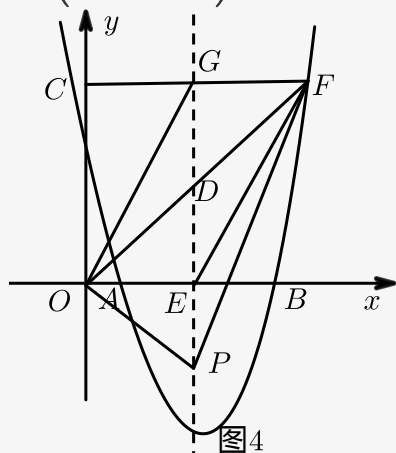


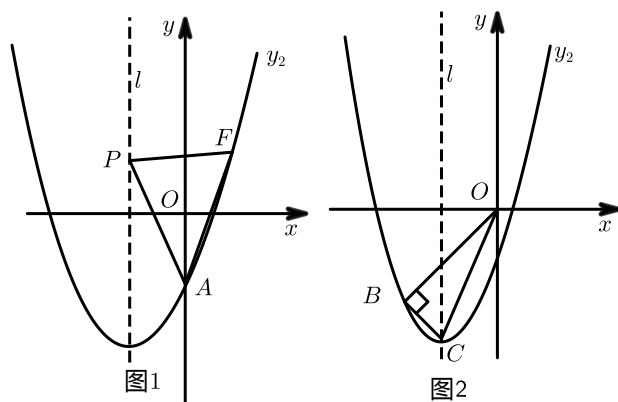
图4

综上所述，抛物线的对称轴上存在点 $P\left(3, -\frac{18}{5}\right)$ 或 $\left(3, \frac{43}{5}\right)$ 或 $\left(3, \frac{\sqrt{61}+5}{2}\right)$ 或 $\left(3, \frac{-\sqrt{61}-5}{2}\right)$ ，使得 $\triangle OFP$ 是直角三角形。

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

三、等腰直角三角形

7. 将抛物线 $y_1 = x^2$ 先向左平移2个单位长度，再向下平移6个单位长度得到抛物线 y_2 。



- (1) 直接写出抛物线 y_2 的解析式 .
- (2) 如图1, 抛物线 y_2 交 y 轴于点 A , 点 $F(1, m)$ 在抛物线 y_2 上, 在其对称轴 l 上是否存在一点 P , 使得 $\triangle PAF$ 周长最小? 若存在求出周长最小值, 若不存在请说明理由 .
- (3) 如图2, 若点 B 在抛物线 y_2 上, 点 C 在对称轴 l 上, 当 $\triangle OBC$ 是以 OC 为斜边的等腰直角三角形时, 求点 B 的坐标 .

【答案】 (1) $y_2 = (x + 2)^2 - 6$.

(2) 存在, $\sqrt{26} + 5\sqrt{2}$.

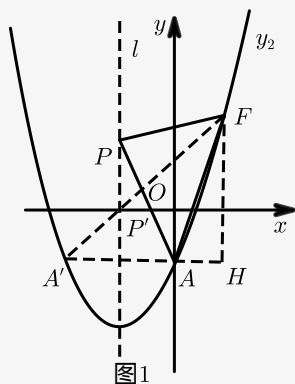
(3) $(1, 3)$ 或 $(-5, 3)$ 或 $(-4, -2)$ 或 $(0, -2)$.

【解析】 (1) 将抛物线 $y_1 = x^2$ 先向左平移2个单位得到抛物线 $y_1' = (x + 2)^2$, 再向下平移6个单位得到抛物线 $y_2 = (x + 2)^2 - 6$.

(2) 存在, 理由如下:

当 $x = 1$ 时, $y_2 = (1 + 2)^2 - 6 = 3$, 即点 $F(1, 3)$.

如图, 作点 A 关于 l 的对称点 A' ,



因为点 A 在 y_2 上且直线 l 是 y_2 的对称轴,

所以点 A' 也在 y_2 上,

即点 $A'(-4, -2)$.

连接 FA' 交直线 l 于点 P' , 则此时 $PA + PF$ 的值最小即为 FA' ,

即 $\triangle PAF$ 周长的最小值为 $FA + FA'$.

过点 F 作 $FH \perp AA'$ 于点 H , 则 $\angle FHA' = 90^\circ$, $H(1, -2)$,

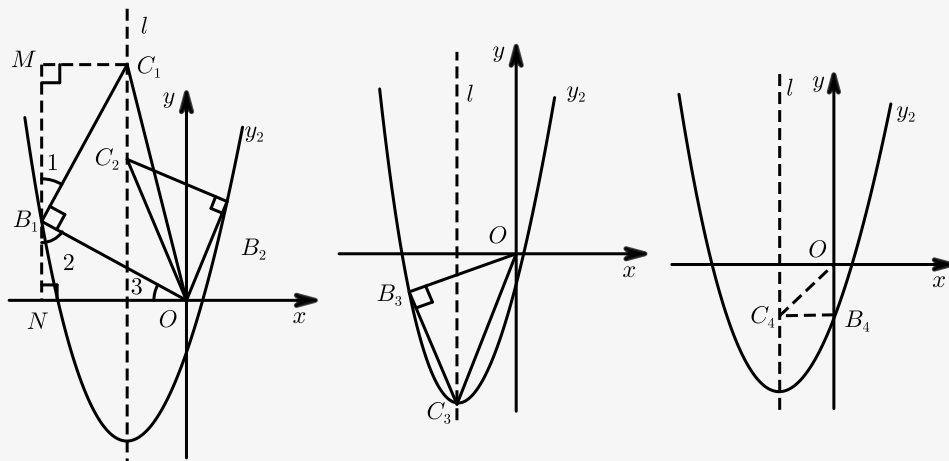
在 $\text{Rt}\triangle FHA'$ 中 , $FA' = \sqrt{FH^2 + A'H^2} = 5\sqrt{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle FAH$ 中 , $FA = \sqrt{FH^2 + AH^2} = \sqrt{26}$,

即 $\triangle PAF$ 周长的最小值为 $\sqrt{26} + 5\sqrt{2}$.

(3) 如图 , 当点 B 在 x 轴上方时 ,

过点 B_1 作直线 $MN \perp x$ 轴于点 N , 过点 C_1 作 $C_1M \perp MN$ 于点 M ,



则 $\angle C_1MB_1 = \angle B_1NO = 90^\circ$.

$\because \triangle OBC$ 是以 OC 为斜边的等腰直角三角形 ,

$\therefore \angle OB_1C_1 = 90^\circ$, $OB_1 = B_1C_1$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, $\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

在 $\triangle ONB_1$ 和 $\triangle B_1MC_1$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ \angle B_1NO = \angle C_1MB_1 , \\ OB_1 = B_1C_1 \end{cases}$$

$\therefore \triangle ONB_1 \cong \triangle B_1MC_1 (\text{AAS})$,

$\therefore MC_1 = NB_1$.

设点 $B_1(m, m^2 + 4m - 2)$, 则

$MC_1 = -2 - m$, $NB_1 = m^2 + 4m - 2$,

$\therefore m^2 + 4m - 2 = |-2 - m|$, 即 $m = -5$ 或 $m = 1$,

即点 B 坐标为 $(1, 3)$ 或 $(-5, 3)$.

同理 , 当点 B 在 x 轴的下方时 ,

$|m^2 + 4m - 2| = -2 - m$,

即 $m = -4$, 则 B 点坐标为 $(-4, -2)$.

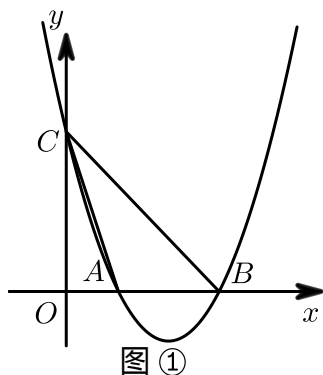
当点 B 为 y 轴与抛物线 y_2 的交点时 , $B_4(0, -2)$,

此时 $OB_4 = B_4C_4 = 2$, $\triangle OB_4C_4$ 是以 OC_4 为斜边的等腰直角三角形 .

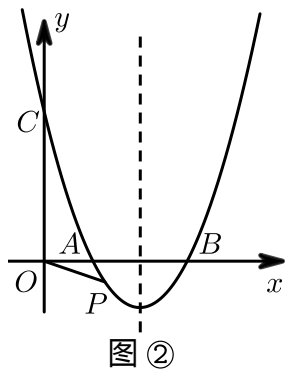
综上所述：点 B 的坐标为 $(1, 3)$ 或 $(-5, 3)$ 或 $(-4, -2)$ 或 $(0, -2)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与等腰直角三角形结合

8. 如图①，已知抛物线 $y = ax^2 - 4amx + 3am^2$ (a 、 m 为参数，且 $a > 0$ ， $m > 0$)与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 的左边)，与 y 轴交于点 C 。



- (1) 求点 B 的坐标 (结果可以含参数 m)。
- (2) 连接 CA 、 CB ，若 $C(0, 3m)$ ，求 $\tan \angle ACB$ 的值。
- (3) 如图②，在(2)的条件下，抛物线的对称轴为直线 $l: x = 2$ ，点 P 是抛物线上的一个动点， F 是抛物线的对称轴 l 上的一点，在抛物线上是否存在点 P 使 $\triangle POF$ 成为以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



【答案】 (1) $B(3m, 0)$ 。

(2) $\frac{1}{2}$ 。

(3) $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 。

【解析】 (1) 令 $y = 0$ ，则有 $ax^2 - 4amx + 3am^2 = 0$ ，

解得： $x_1 = m$ ， $x_2 = 3m$ ，

$\because m > 0$ ， A 在 B 的左边，

$$\therefore B(3m, 0).$$

(2) 如图1, 过点A作 $AD \perp BC$, 垂足为点D,

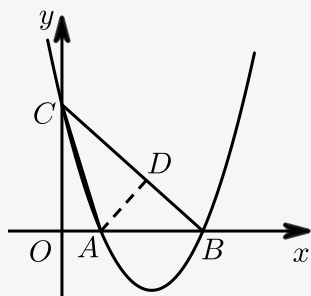


图 1

由(1)可知 $B(3m, 0)$, 则 $\triangle BOC$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore OC = OB = 3m,$$

$$\therefore BC = 3\sqrt{2}m,$$

$$\text{又} \because \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = 45^\circ,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore AB = 2m,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}m, CD = 2\sqrt{2}m,$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}m} = \frac{1}{2}.$$

(3) $\because$ 由题意知 $x = 2$ 为对称轴,

$$\therefore 2m = 2,$$

$$\text{即 } m = 1,$$

$$\therefore \text{在(2)的条件下有 } (0, 3m),$$

$$\therefore 3m = 3am^2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{a}, \text{ 即 } a = 1,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 - 4x + 3.$$

①当P在对称轴的左边, 如图2,

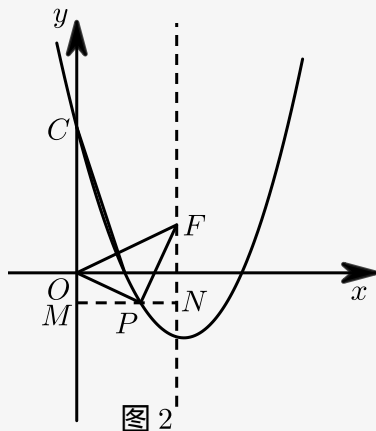


图 2

过 P 作 $MN \perp y$ 轴, 交 y 轴于 M , 交 l 于 N ,
 $\therefore \triangle OPF$ 是等腰直角三角形, 且 $OP = PF$,
 易得 $\triangle OMP \cong \triangle PNF$,

$$\therefore OM = PN,$$

$$\therefore P(m, m^2 - 4m + 3),$$

$$\text{则 } -m^2 + 4m - 3 = 2 - m,$$

$$\text{解得: } m = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{5 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right);$$

②当 P 在对称轴的右边,

如图3, 过 P 作 $MN \perp x$ 轴于 N , 过 F 作 $FM \perp MN$ 于 M ,

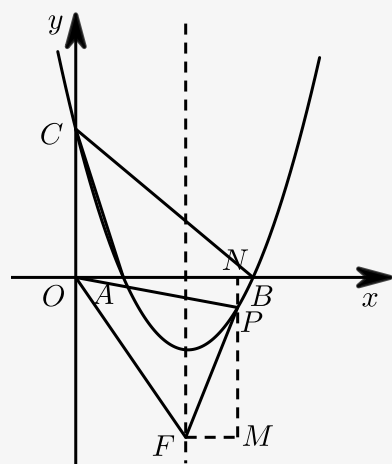


图 3

同理得 $\triangle ONP \cong \triangle PMF$,

$$\therefore PN = FM,$$

$$\text{则 } -m^2 + 4m - 3 = m - 2,$$

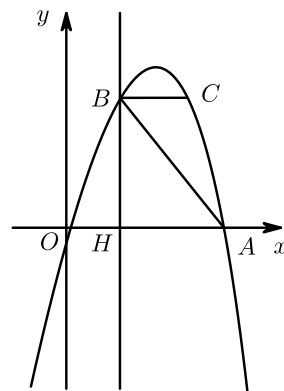
$$\text{解得: } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{3 - \sqrt{5}}{2};$$

$$P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right);$$

$$\text{综上所述, 点 } P \text{ 的坐标是: } \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

【标注】【知识点】二次函数与等腰三角形结合

9. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 过 $A(4, 0)$, $B(1, 3)$ 两点, 点 C 、 B 关于抛物线的对称轴对称, 过点 B 作直线 $BH \perp x$ 轴, 交 x 轴于点 H .



- (1) 求抛物线的表达式 .
- (2) 直接写出点 C 的坐标 , 并求出 $\triangle ABC$ 的面积 .
- (3) 点 P 是抛物线上一动点 , 且位于第四象限 , 当 $\triangle ABP$ 的面积为 6 时 , 求出点 P 的坐标 .
- (4) 若点 M 在直线 BH 上运动 , 点 N 在 x 轴上运动 , 当以点 C 、 M 、 N 为顶点的三角形为等腰直角三角形时 , 请直接写出此时 $\triangle CMN$ 的面积 .

【答案】 (1) $y = -x^2 + 4x$.

(2) 点 C 的坐标为 $(3, 3)$, $S_{\triangle ABC} = 3$.

(3) 点 P 坐标为 $(5, -5)$.

(4) $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{29}{2}$ 或 17 或 5 .

【解析】 (1) 把点 $A(4, 0)$, $B(1, 3)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx$ 中 ,

$$\text{得} \begin{cases} 0 = 16a + 4b \\ 3 = a + b \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线表达式为 : $y = -x^2 + 4x$.

(2) 点 C 的坐标为 $(3, 3)$,

又 $\because$ 点 B 的坐标为 $(1, 3)$,

$$\therefore BC = 2 ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3 .$$

(3) 过 P 点作 $PD \perp BH$ 交 BH 于点 D , 如图 1 ,

设点 $P(m, -m^2 + 4m)$,

根据题意 , 得 : $BH = AH = 3$, $HD = m^2 - 4m$, $PD = m - 1$,

$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABH} + S_{\text{四边形}HAPD} - S_{\triangle BPD} ,$$

$$6 = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} (3 + m - 1)(m^2 - 4m) - \frac{1}{2} (m - 1)(3 + m^2 - 4m) ,$$

$$\therefore 3m^2 - 15m = 0 ,$$

$$m_1 = 0 \text{ (舍去)} , m_2 = 5 ,$$

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(5, -5)$.

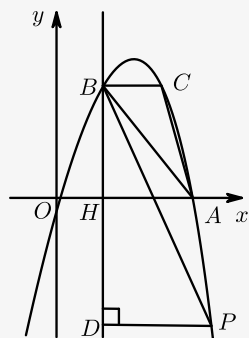


图 1

(4) 以点 C 、 M 、 N 为顶点的三角形为等腰直角三角形时，分三类情况讨论：

① 以点 M 为直角顶点且 M 在 x 轴上方时，如图 2， $CM = MN$ ， $\angle CMN = 90^\circ$ ，

则 $\triangle CBM \cong \triangle MHN$ ，

$\therefore BC = MH = 2$ ， $BM = HN = 3 - 2 = 1$ ，

$\therefore M(1, 2)$ ， $N(2, 0)$ ，

由勾股定理得： $MC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

$\therefore S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{5}{2}$ 。

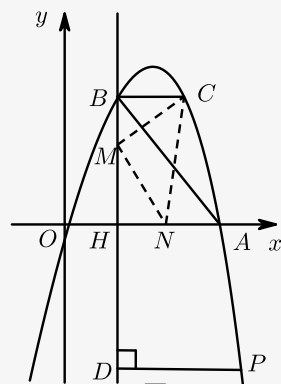


图 2

② 以点 M 为直角顶点且 M 在 x 轴下方时，如图 3，作辅助线，构建如图所示的两直角三角形： $\text{Rt}\triangle NEM$ 和 $\text{Rt}\triangle MDC$ ，

得 $\text{Rt}\triangle NEM \cong \text{Rt}\triangle MDC$ ，

$\therefore EM = CD = 5$ ， $MD = NE = 2$ ，

由勾股定理得： $CM = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ ，

$\therefore S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \sqrt{29} = \frac{29}{2}$ 。

③ 以点 N 为直角顶点且 N 在 y 轴左侧时，如图 4， $CN = MN$ ， $\angle MNC = 90^\circ$ ，作辅助线，

同理得： $CN = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ ，

$\therefore S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \times \sqrt{34} \times \sqrt{34} = 17$ 。

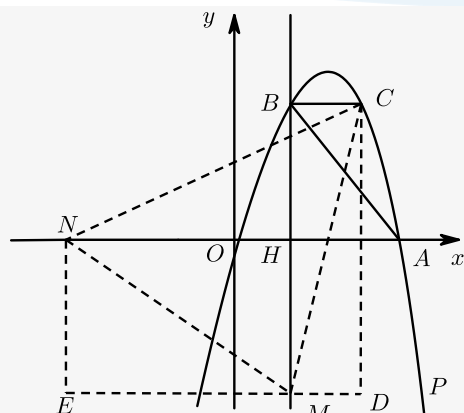


图 3

④以点 N 为直角顶点且 N 在 y 轴右侧时，作辅助线，如图5，同理得：

$$CN = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 5.$$

⑤以 C 为直角顶点时，不能构成满足条件的等腰直角三角形，如图6.

综上所述： $\triangle CMN$ 的面积为： $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{29}{2}$ 或17或5.

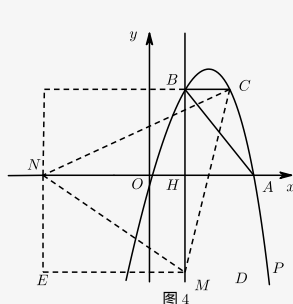


图 4

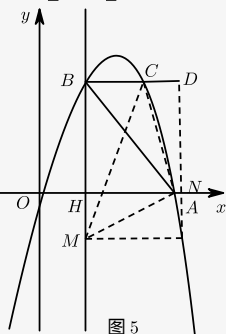


图 5

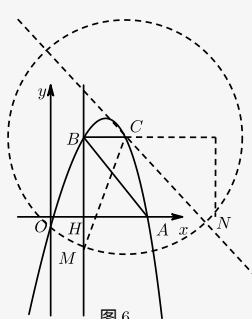
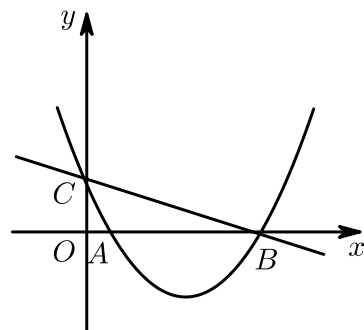


图 6

【标注】【知识点】等腰直角三角形的存在性

四、相似三角形

10. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 - 5ax + 2$ ($a \neq 0$) 与 y 轴交于点 C ，与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B .



(1) 求抛物线的解析式.

(2)

若点 N 是抛物线上的动点，过点 N 作 $NH \perp x$ 轴，垂足为 H ，以 B, N, H 为顶点的三角形是否能够与 $\triangle OBC$ 相似？若能，请求出所有符合条件的点 N 的坐标；若不能，请说明理由。

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$.

(2) 能， $(2, -1)$ 或 $(5, 2)$ 或 $(-3, 14)$ 或 $(0, 2)$.

【解析】(1) $\because$ 点 $A(1, 0)$ 在抛物线 $y = ax^2 - 5ax + 2$ 上，

$$\therefore a - 5a + 2 = 0 ,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为：} y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 .$$

(2) 设 $N\left(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2\right)$ ，

分四种情况：

①当 N 在第四象限时， $\triangle OBC \sim \triangle HBN$ 时，如图1，

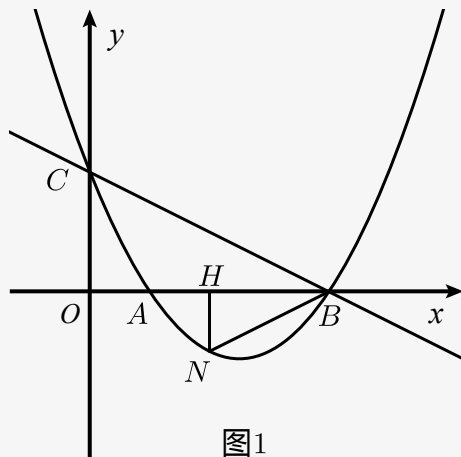


图1

$$\therefore \frac{OB}{BH} = \frac{OC}{HN} ,$$

$$\text{即 } \frac{4}{4-x} = \frac{2}{-\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2\right)} ,$$

解得： $x_1 = 2, x_2 = 4$ （不合题意，舍去），

$\therefore N(2, -1)$ ；

②当 N 在第一象限时， $\triangle OBC \sim \triangle HNB$ ，如图2，

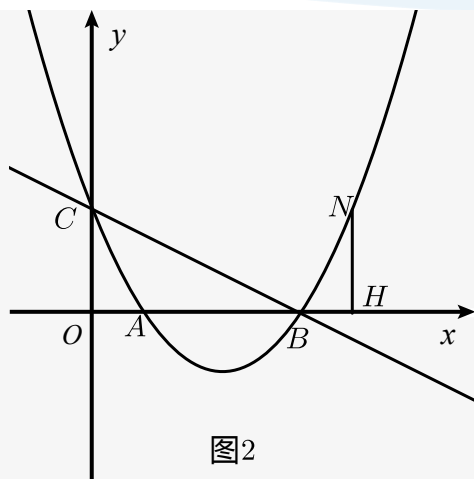


图2

$$\therefore \frac{OB}{HN} = \frac{OC}{BH},$$

$$\text{即 } \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2} = \frac{2}{x-4},$$

解得： $x_1 = 5, x_2 = 4$ (舍去)，

$\therefore N(5, 2)$ ；

③当N在第三象限时， $\triangle OBC \sim \triangle HNB$ ，如图3，

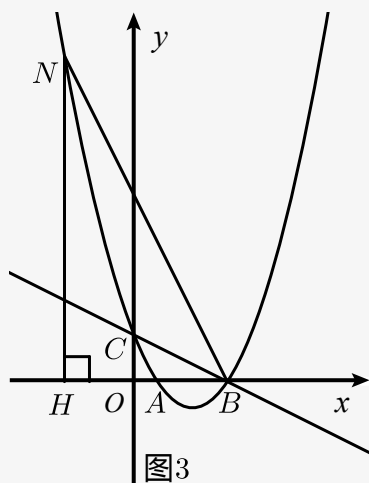


图3

$$\therefore \frac{OB}{HN} = \frac{OC}{BH},$$

$$\text{即 } \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2} = \frac{2}{4-x},$$

解得： $x_1 = -3, x_2 = 4$ (不合题意，舍去)，

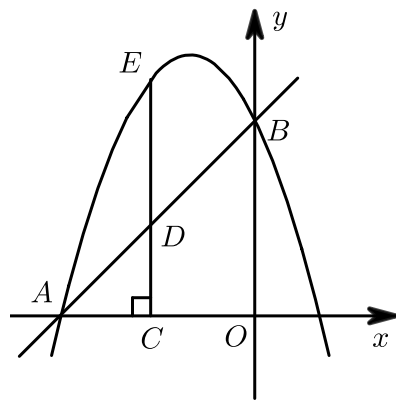
$\therefore N(-3, 14)$ ；

④当 $\triangle BCO \cong \triangle BNH$ 时，N与C重合， $N(0, 2)$ 。

综上所述，N点的坐标为 $(2, -1)$ 或 $(5, 2)$ 或 $(-3, 14)$ 或 $(0, 2)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = x + 4$ 与坐标轴分别交于A、B两点，过A、B两点的抛物线为 $y = -x^2 + bx + c$ 。点D为线段AB上一动点，过点D作 $CD \perp x$ 轴于点C，交抛物线于点E。



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 当 $DE = 4$ 时 , 求四边形 $CAEB$ 的面积 .
- (3) 连接 BE , 是否存在点 D , 使得 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DAC$ 相似 ? 若存在 , 求此点 D 坐标 . 若不存在 , 说明理由 .

【答案】 (1) $y = -x^2 - 3x + 4$.

(2) 12 .

(3) $(-3, 1)$ 或 $(-2, 2)$.

【解析】 (1) 在直线解析式 $y = x + 4$ 中 , 令 $x = 0$, 得 $y = 4$. 令 $y = 0$, 得 $x = -4$,

$\therefore A(-4, 0)$, $B(0, 4)$.

$\because$ 点 $A(-4, 0)$, $B(0, 4)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上 ,

$$\therefore \begin{cases} -16 - 4b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases} ,$$

解得 : $b = -3$, $c = 4$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 : $y = -x^2 - 3x + 4$.

(2) 设点 C 坐标为 $(m, 0) (m < 0)$, 则 $OC = -m$, $AC = 4 + m$.

$\because OA = OB = 4$,

$\therefore \angle BAC = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ACD$ 为等腰直角三角形 ,

$\therefore CD = AC = 4 + m$,

$\therefore CE = CD + DE = 4 + m + 4 = 8 + m$,

$\therefore$ 点 E 坐标为 $(m, 8 + m)$.

$\because$ 点 E 在抛物线 $y = -x^2 - 3x + 4$ 上 ,

$\therefore 8 + m = -m^2 - 3m + 4$, 解得 $m_1 = m_2 = -2$.

$\therefore C(-2, 0)$, $AC = OC = 2$, $CE = 6$,

$$S_{\text{四边形}CAEB} = S_{\triangle ACE} + S_{\text{梯形}OCEB} - S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 + \frac{1}{2}(6+4) \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 12$$

(3) 设点C坐标为 $(m, 0)$ ($m < 0$)，则 $OC = -m$ ， $CD = AC = 4 + m$ ，

$BD = \sqrt{2}OC = -\sqrt{2}m$ ，则 $D(m, 4 + m)$ 。

$\because \triangle ACD$ 为等腰直角三角形， $\triangle DBE$ 和 $\triangle DAC$ 相似

$\therefore \triangle DBE$ 必为等腰直角三角形。

i) 若 $\angle BED = 90^\circ$ ，则 $BE = DE$ ，

$\therefore BE = OC = -m$ ，

$\therefore DE = BE = -m$ ，

$\therefore CE = 4 + m - m = 4$ ，

$\therefore E(m, 4)$ 。

$\because$ 点E在抛物线 $y = -x^2 - 3x + 4$ 上，

$\therefore 4 = -m^2 - 3m + 4$ ，解得 $m = 0$ （不合题意，舍去）或 $m = -3$ ，

$\therefore D(-3, 1)$ 。

ii) 若 $\angle EBD = 90^\circ$ ，则 $BE = BD = -\sqrt{2}m$ ，

在等腰直角三角形EBD中， $DE = \sqrt{2}BD = -2m$ ，

$\therefore CE = 4 + m - 2m = 4 - m$ ，

$\therefore E(m, 4 - m)$ 。

$\because$ 点E在抛物线 $y = -x^2 - 3x + 4$ 上，

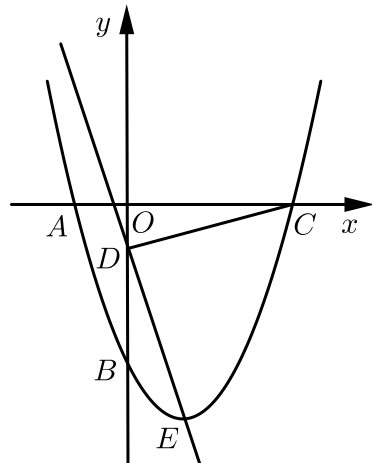
$\therefore 4 - m = -m^2 - 3m + 4$ ，解得 $m = 0$ （不合题意，舍去）或 $m = -2$ ，

$\therefore D(-2, 2)$ 。

综上所述，存在点D，使得 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DAC$ 相似，点D的坐标为 $(-3, 1)$ 或 $(-2, 2)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

12. 如图所示，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过A、B两点，A、B两点的坐标分别为 $(-1, 0)$ 、 $(0, -3)$ 。



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 点 E 为抛物线的顶点 , 点 C 为抛物线与 x 轴的另一交点 , 点 D 为 y 轴上一点 , 且 $DC = DE$, 求出点 D 的坐标 .
- (3) 在第二问的条件下 , 在直线 DE 上存在点 P , 使得以 C 、 D 、 P 为顶点的三角形与 $\triangle DOC$ 相似 , 请你直接写出所有满足条件的点 P 的坐标 .

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) 点 D 的坐标为 $(0, -1)$.

(3) 满足条件的点 P 共有 4 个 , 其坐标分别为 $(-\frac{1}{3}, 0)$ 、 $(\frac{1}{3}, -2)$ 、 $(-3, 8)$ 、 $(3, -10)$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, -3)$,

$$\therefore \begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases} ,$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases} ,$$

故抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) 令 $x^2 - 2x - 3 = 0$,

解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

则点 C 的坐标为 $(3, 0)$,

$$\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 ,$$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(1, -4)$,

设点 D 的坐标为 $(0, m)$, 作 $EF \perp y$ 轴于点 F ,

$$\because DC^2 = OD^2 + OC^2 = m^2 + 3^2 , DE^2 = DF^2 + EF^2 = (m + 4)^2 + 1^2 ,$$

$$DC = DE ,$$

$$\therefore m^2 + 9 = m^2 + 8m + 16 + 1 ,$$

解得 $m = -1$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0, -1)$.

(3) $\because$ 点 $C(3, 0)$, $D(0, -1)$, $E(1, -4)$,

$$\therefore CO = DF = 3 , DO = EF = 1 ,$$

$$\text{根据勾股定理得 } CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} ,$$

在 $\triangle COD$ 和 $\triangle DFE$ 中 ,

$$\therefore \begin{cases} CO = DF \\ \angle COD = \angle DFE = 90^\circ \\ DO = EF \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle COD \cong \triangle DFE \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle DCO ,$$

$$\text{又} \because \angle DCO + \angle CDO = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle EDF + \angle CDO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore CD \perp DE,$$

①当 $\triangle DOC \sim \triangle PDC$ 时,

$$\therefore \frac{OC}{DC} = \frac{OD}{DP},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{DP},$$

$$\text{解得 } DP = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

过点 P 作 $PG \perp y$ 轴于点 G ,

$$\text{则 } \frac{DG}{DF} = \frac{PG}{EF} = \frac{DP}{DE},$$

$$\text{即 } \frac{DG}{3} = \frac{PG}{1} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{3}}{\sqrt{10}},$$

$$\text{解得 } DG = 1, PG = \frac{1}{3},$$

当点 P 在点 D 的左边时, $OG = DG - DO = 1 - 1 = 0$,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{1}{3}, 0\right),$$

当点 P 在点 D 的右边时, $OG = DO + DG = 1 + 1 = 2$,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{1}{3}, -2\right).$$

②当 $\triangle DOC \sim \triangle CDP$ 时,

$$\therefore \frac{OC}{DP} = \frac{OD}{DC},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{DP} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\text{解得 } DP = 3\sqrt{10},$$

过点 P 作 $PG \perp y$ 轴于点 G ,

$$\text{则 } \frac{DG}{DF} = \frac{PG}{EF} = \frac{DP}{DE},$$

$$\text{即 } \frac{DG}{3} = \frac{PG}{1} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}},$$

$$\text{解得 } DG = 9, PG = 3,$$

当点 P 在点 D 的左边时, $OG = DG - OD = 9 - 1 = 8$,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标是 } (-3, 8),$$

当点 P 在点 D 的右边时, $OG = OD + DG = 1 + 9 = 10$,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标是 } (3, -10),$$

综上所述, 满足条件的点 P 共有4个, 其坐标分别为 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ 、 $\left(\frac{1}{3}, -2\right)$ 、 $(-3, 8)$ 、

$(3, -10)$.

